جامعة البعث | تحليل عقدي /1/ | اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018

السؤال الأول :(8+9+8=25درجة)

1"- أوجد المعادلة الديكارتية للنقاط التي تحقق العلاقة $|z-1| = \mathrm{Re}(z)+1$ صف هذا المنحني بدقة .

2"- إذا كان $z = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$ فأوجد $|e^{iz}|$.

3"- أوجد العدد العقدي الذي يناظر النقطة $p(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$ من سطح كرة ريمان.

السؤال الثاني : (10+15=25درجة)

1"- ليكن لدينا الدالة

$$f(z) = \frac{x^3 y(y-ix)}{(x^6+y^2)(x+iy)}$$

المطلوب : 1"- أوجد نهاية الدالة عندما تسعى z نحو الصفر على المستقيم $y=2x$.

2"-أوجد نهاية الدالة عندما تسعى z نحو الصفر على المنحني $y=x^3$ ماذا تستنتج.

2" –إذا كانت الدالة v مرافق توافقي للدالة u فاثبت أن الدالة $u.v$ هي دالة توافقية .

السؤال الثالث: (13+12=25درجة)

1" –إذا كان

$$\log z = Log r + i\varphi \ : \ r \succ 0, \quad -\frac{\pi}{4} \prec \varphi \prec \frac{7\pi}{4}$$

فأوجد $\log(\frac{\sqrt{3}-i}{2})^2$ و $2\log(\frac{\sqrt{3}-i}{2})$ ماذا تستنتج .

2"- أوجد قيم z التي تحقق المعادلة $e^{2z} - \sqrt{3}e^{z} + 1 = 0$

السؤال الرابع : (25درجة)

أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = 2 \, , z_2 = \infty \, , z_3 = -1$ فوق النقاط

$w_1 = 1 \, , w_2 = -1 \, , w_3 = 0$ ثم أوجد خيال $|z+1| = 2$ وفق التحويلة الناتجة .

****

مدرس المقرر : د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول: ($8+9+8=25$ درجة)

أولاً: بما أن $z=6e^{i\frac{\pi}{3}}$ ⇐ $z=6(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ 2

(8) درجات $z=6(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt3}{2})=3+i3\sqrt3 \Rightarrow iz=-3\sqrt3+i3$ 1+1+1

$e^{iz}=e^{-3\sqrt3+i3}=e^{-3\sqrt3}(\cos3+i\sin3) \Rightarrow |e^{iz}|=e^{-3\sqrt3}$ 1+1+1

ثانياً: نفرض أن $z=x+iy$ عندئذٍ $z-1=x-1+iy$ ⇐ $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ 1+1

(9) درجات

1+1 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=(x+1)^2 \Rightarrow$

1+1 $x^2-2x+1+y^2=x^2+2x+1 \Rightarrow 4x=y^2 \Rightarrow x=\frac{1}{4}y^2$

3 وهي معادلة قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ محوره الحقيقي هو محور السينات

فتحته نحو السينات الموجبة

ثالثاً:

(8) 4+2+2 $z=\frac{[illegible]}{1-h}+i\frac{[illegible]}{1-h}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt2}{2}}+i\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{1}{2-\sqrt2}+i\frac{1}{2-\sqrt2}$

جواب السؤال الثاني ($15+10=25$ درجة)

(15) أولاً: على المستقيم $y=2x$ نأخذ $z=x+2xi$ وعندما z تسعى نحو الصفر فإن x تسعى نحو الصفر

$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{x\to0}\frac{x^3(2x)(2x-ix)}{(x^6+4x^4)(x+i2x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^5(4-2i)}{x^3(x^2+4)(1+2i)}$ 2

$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(4-2i)}{(x^2+4)(1+2i)}=0$ 2

على المنحني $y=x^3$ نأخذ $z=x+ix^3$ وعندما z تسعى نحو الصفر فإن x تسعى نحو الصفر

$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{x\to0}\frac{x^3(x^3)(x^3-ix)^2}{(x^6+x^6)(x^3+ix^3)}=\lim_{x\to0}\frac{x^7(x^2-i)}{2x^7(1+ix^2)}=\frac{-i}{2}$ 2

2 نستنتج بأنه ليس للتابع نهاية لأن النهاية اختلفت باختلاف الطريق

ثانياً: نكون الدالة (u.v) توافقية اذا وفقط اذا كانت المشتقات الجزئية الاولى والثانية موجودة ومستمرة وتحقق معادلة لابلاس في انها (15)

2 $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u.v)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u.v)=0$$

1 $$\frac{\partial}{\partial x}(u.v)=\frac{\partial u}{\partial x}.v+u.\frac{\partial v}{\partial x}$$

1 $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u.v)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v+\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x}+u.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

1 $$\frac{\partial}{\partial y}(u.v)=\frac{\partial u}{\partial y}.v+u.\frac{\partial v}{\partial y}$$

1 $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u.v)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}v+2\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

وحيث ان u و v توافقيتين فان u ، v مشتقاتها الجزئية الاولى والثانية موجودة ومستمرة و

1+1 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

1+1 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

وبالتالي

5 $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u.v)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u.v)=v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x}-2\frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x}+$$

$$u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=0$$

اذاً الدالة (u.v) توافقية

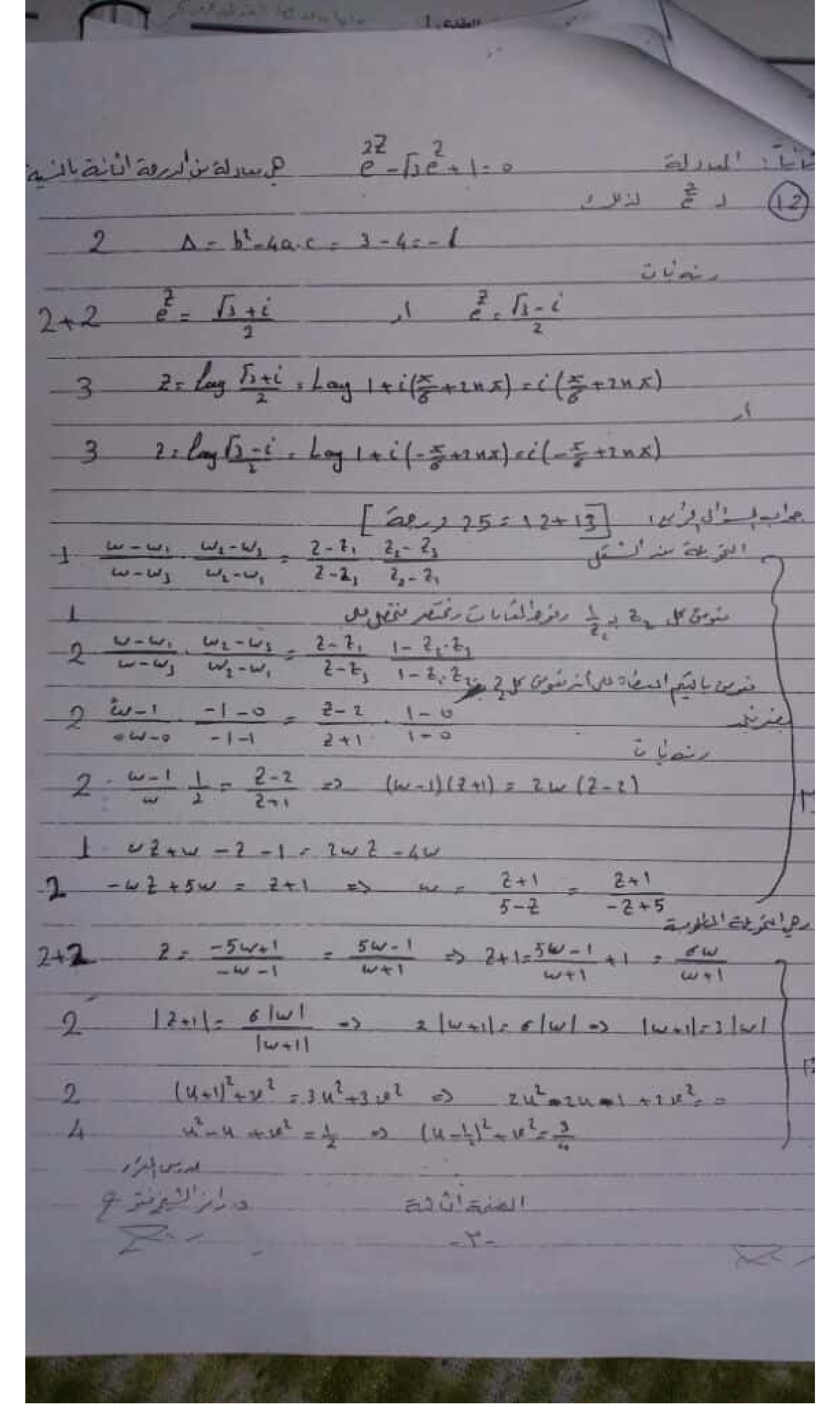
جواب السؤال الثالث: (13 + 12 = 25 درجة)

اذاً $\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^2=\log\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\mathrm{Log}\left|\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right|+i\varphi$ 3

$=\mathrm{Log}\,1+i\varphi=i\varphi=i\frac{5\pi}{6}$ 2

$2\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=2\left[\mathrm{Log}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right|+i\varphi\right]=2\left[\mathrm{Log}\,1+i\varphi\right]=i2\varphi=-\frac{i\pi}{3}$ 3 2

نلاحظ ان $\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^2\neq 2\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$ 3



ثانياً: المسألة

(12) درجة للأولى

$e^{2z} - \sqrt{3}\, e^{z} + 1 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة

2 $\Delta = b^2 - 4a.c = 3 - 4 = -1$

ومنه

2+2 $e^{z} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ أو $e^{z} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

3 $z = \log \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \log 1 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)$

أو

3 $z = \log \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \log 1 + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) = i\left(-\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)$

جواب السؤال الرابع [25 درجة = 12 + 13]

التحويلة من الشكل

1 $\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$

1 نعوض كل z_2 بـ $\frac{1}{\bar z_2}$ ونحفظ المسافات ونختصر

2 $\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{1 - \bar z_2 \cdot z_1}{1 - \bar z_2 \cdot z_3}$

نعوض بالقيم السابقة بعد أن نعوض كل z_2

2 $\frac{w - 1}{w - 0} \cdot \frac{-1 - 0}{-1 - 1} = \frac{z - 2}{z + 1} \cdot \frac{1 - 0}{1 - 0}$ فنجد

ومنه

2 $\frac{w - 1}{w} \cdot \frac{1}{2} = \frac{z - 2}{z + 1} \Rightarrow (w - 1)(z + 1) = 2w(z - 2)$

1 $wz + w - z - 1 = 2wz - 4w$

2 $-wz + 5w = z + 1 \Rightarrow w = \frac{z + 1}{5 - z} = \frac{z + 1}{-z + 5}$

وهي التحويلة المطلوبة

2+2 $z = \frac{-5w + 1}{-w - 1} = \frac{5w - 1}{w + 1} \Rightarrow z + 1 = \frac{5w - 1}{w + 1} + 1 = \frac{6w}{w + 1}$

2 $|z + 1| = \frac{6|w|}{|w + 1|} \Rightarrow 2|w + 1| = 6|w| \Rightarrow |w + 1| = 3|w|$

2 $(u + 1)^2 + v^2 = 3u^2 + 3v^2 \Rightarrow 2u^2 - 2u - 1 + 2v^2 = 0$

4 $u^2 - u + v^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{3}{4}$

مدرس المادة

د. زياد ...